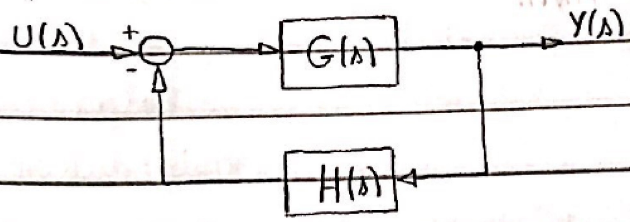
exemplo 2:

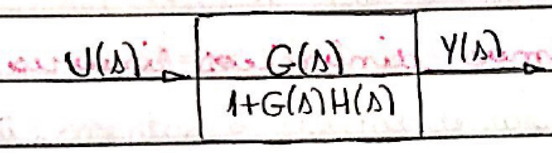


$$Y(s) = G(s)[U(s) - H(s)Y(s)]$$

$$Y(s) = G(s)U(s) - G(s)H(s)Y(s)$$

$$Y(s)[1 + G(s)H(s)] = G(s)U(s)$$

$$Y(s) = \frac{G(s)}{1 + G(s)H(s)} U(s)$$



~ FIM MODELAGEM ~

→ solução de equações de estado!

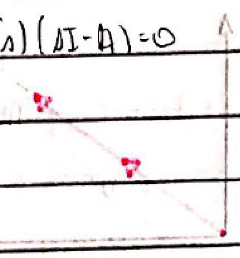
$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$

como resolver essa equação?

$sX(s) = AX(s)$

$X(s)(s - A) = 0$

$X(s)(sI - A) = 0$



se $A \in \mathbb{R}$, (ou seja, $A = a$), então

$\dot{x} = ax, \; x(0) = x_0 \rightarrow x(t) = e^{at} \cdot x_0$

e se $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $n > 1$?

$\dot{x} = Ax, \; x(0) = x_0 \rightarrow x(t) = e^{At} \cdot x_0$

mas o que significa e^{At}?

$$e^{\alpha t} = I + \alpha t + \frac{\alpha^2 t^2}{2} + \ldots + \frac{\alpha^n t^n}{n!} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \alpha^k t^k$$

se $\alpha = A \rightarrow e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k t^k$

$$\frac{d}{dt}e^{At} = \frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}A^k t^k = \frac{d}{dt}\left[I+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k-1)!}A^k t^k\right] =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k(k-1)!}t^{k-1}A^k = A\underbrace{\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{l!}t^l A^l}_{l=k-1}$$

portanto

$$\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}$$

$$x(t) = \sum_{k=1}^{n} c_i v_i e^{\lambda_i t}$$

Aula 07: Resposta no Tempo de sistemas dinâmicos lineares

→ autovalores e autovetores

seja $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, se

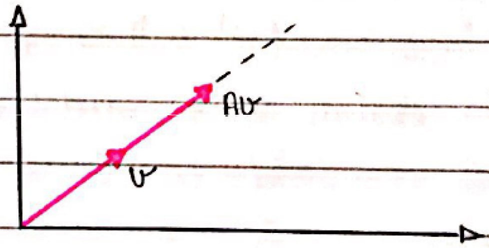
a) $\lambda \in \mathbb{R}$ é autovalor de A e

b) $v \in \mathbb{R}^n$ é autovetor associado a λ,

então:

$$A.v = \lambda.v$$

- interpretação geométrica



$A(Av) = \lambda(\lambda v)$

Av também é um autovalor de A

a direção de v define um subespaço invariante à transformação linear dada pela matriz A.

• como calcular os autovalores e autovetores?

no matlab: HP 50g:

$[V, L] = eig(A)$ eig (?)

sem matlab nem HP:

- obtenção direta pela resolução de sistemas lineares

$Av = \lambda v \rightarrow Av - \lambda v = 0 \rightarrow (\lambda I - A)v = 0$

- procedimento

i) calcular o polinômio característico de A

$p(s) = det(sI - A)$

ii) encontrar as raízes de $p(s)$

$\lambda_i,\ i = 1, \dots, n$ tais que

$p(\lambda_i) = det(\lambda_i I - A) = 0$

iii) montar o sistema linear

$(\lambda_i I - A)x = 0$

iv) encontrar $v_i,\ i = 1, \dots, n$ tais que ← NA PROVA FAZER ATÉ AQUI E JOGAR NA HP

$(\lambda_i I - A)v_i = 0$

exemplo 1:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$; $(sI - A) = \begin{bmatrix} s-1 & 1 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix}$

$det(sI - A) = (s-1)(s+1) = 0$ → $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$

$(\lambda_1 I - A)v_1 = 0$

$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{11} \\ v_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$v_{12} = 0$; $v_{11} = 1$

portanto, $v_1 = [1 \ \ 0]^T$ é autovetor de A associado a λ_1

$(\lambda_2 I - A)v_2 = 0$

$$\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{21} \\ v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$-2v_{21} - 1v_{22} = 0$

$v_{21} = 1$ (escolhido) ; $v_{22} = -2$ (calculado)

portanto, $v_2 = [1 \quad -2]^T$ é autovetor de A associado a λ_2

exemplo 2:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} ; (sI - A) = \begin{bmatrix} s+1 & 1 \\ -1 & s+1 \end{bmatrix}$$

$\det(sI - A) = (s+1)^2 + 1 = s^2 + 2s + 2 = 0$

$\lambda_1 = -1 + j$; $v_1 = [+1 \quad -j]^T$

$\lambda_2 = -1 - j$; $v_2 = [+1 \quad j]^T$

→ solução de uma equação de estado

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i e^{\lambda_i t}$$

é solução de

$$\dot{x} = Ax, \quad x(0) = x_0$$

se e somente se λ_i é autovalor de A associado ao autovetor v_i, $i = 1, \dots, n$. , $\lambda_i \in \mathbb{C}$ é autovalor de A associado ao autovetor $v_i \in \mathbb{C}^n$ (HIP)

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i e^{\lambda_i t} \rightarrow \dot{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i \lambda_i e^{\lambda_i t} \rightarrow \dot{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i(\lambda_i v_i) e^{\lambda_i t} \xrightarrow{(HIP)}$$

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i A v_i e^{\lambda_i t} \rightarrow \dot{x} = A \sum_{i=1}^{n} c_i v_i e^{\lambda_i t} \rightarrow \dot{x} = Ax$$

AULA 08: resposta completa de um sistema linear

$$x(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i v_i e^{\lambda_i t}$$

é solução de $\dot{x} = Ax$, $x(0) = x_0$ se e só se λ_i, $i=1,\dots,n$ são autovalores de A associados aos respectivos autovetores v_i, $1,\dots,n$.

exemplo 1:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} ; \quad x_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$$

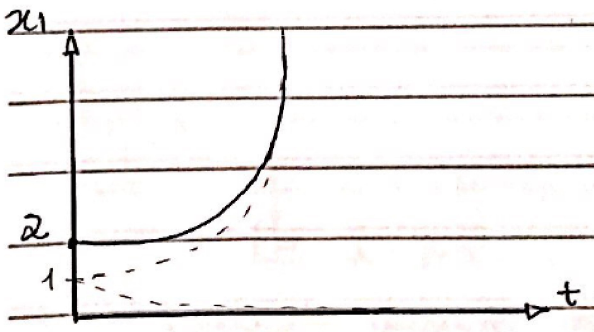
$\lambda_1 = 1$; $v_1 = [1 \quad 0]^T$

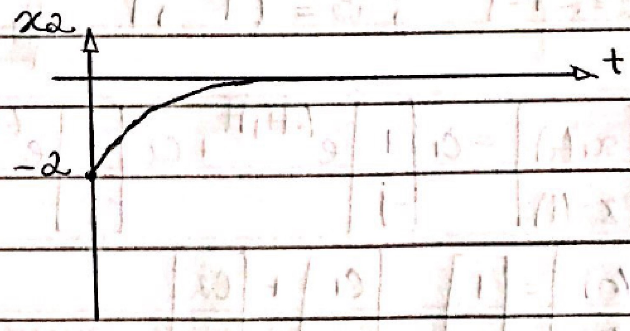
$\lambda_2 = -1$; $v_2 = [1 \quad -2]^T$

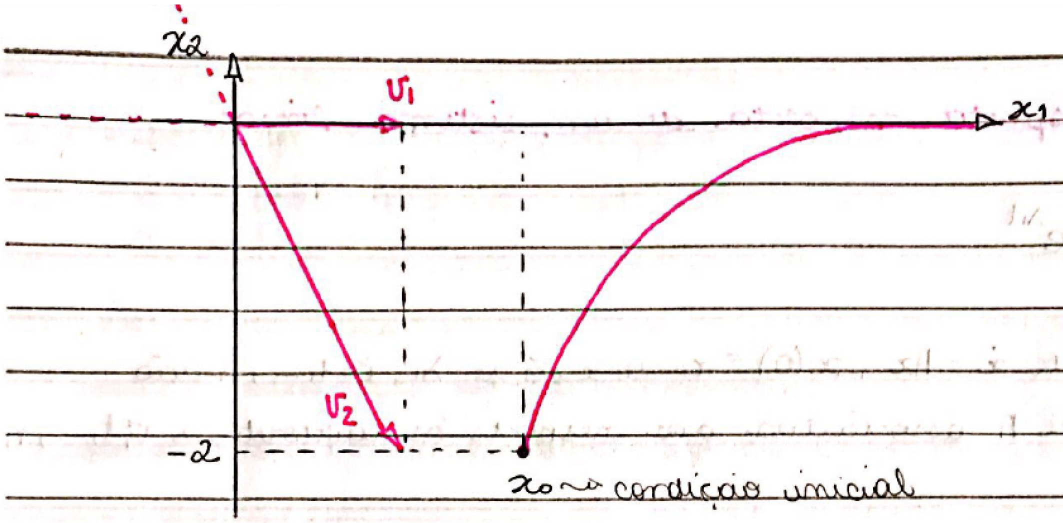
$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{1t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} e^{-1t}$$

$$\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ 0 \end{bmatrix} e^{0} + \begin{bmatrix} c_2 \\ -2c_2 \end{bmatrix} e^{0}$$

$$\left.\begin{array}{l} -2c_2 = -2 \rightarrow c_2 = 1 \\ c_1 + c_2 = 2 \rightarrow c_1 = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x_1(t) = e^{t} + e^{-t} \\ x_2(t) = -2e^{-t} \end{array}$$







→ interpretação geométrica

λ_i → modo de resposta do sistema

v_i → distribuição dos modos de resposta através das variáveis de estado.

exemplo 2:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad ; \quad x_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = -1 + j \quad ; \quad v_1 = [1 \quad -j]^T$

$\lambda_2 = -1 - j \quad ; \quad v_2 = [1 \quad j]^T$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -j \end{bmatrix} e^{(-1+j)t} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ j \end{bmatrix} e^{(-1-j)t}$$

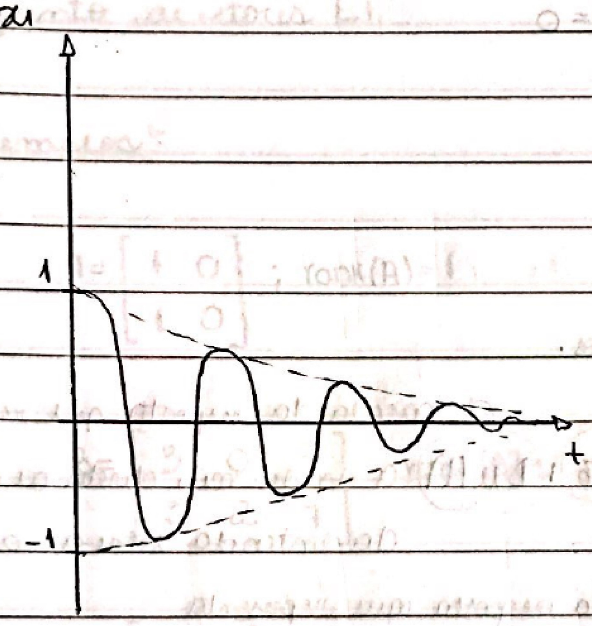
$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ -jc_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_2 \\ jc_2 \end{bmatrix}$$

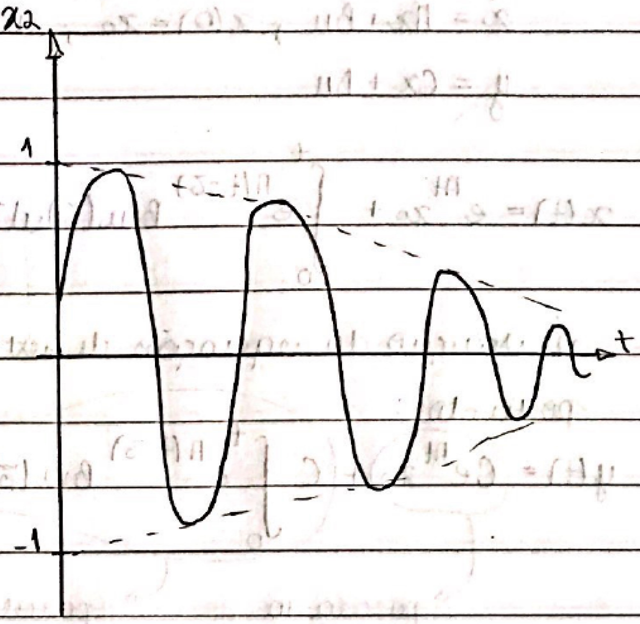
$$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 1 \\ -jc_1 + jc_2 = 0 \end{array}\right\} \quad c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$$

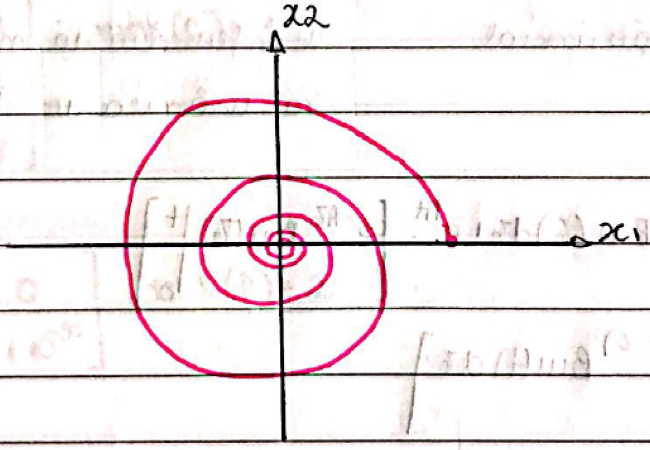
$$x_1(t) = \frac{1}{2} e^{-t} \cdot e^{jt} + \frac{1}{2} e^{-t} \cdot e^{-jt} \qquad x_2(t) = \frac{1}{-2j} e^{-t} e^{jt} + \frac{1}{2j} e^{-t} e^{-jt}$$

$$x_1(t) = e^{-t} \left(\frac{e^{jt} + e^{-jt}}{2} \right) \qquad x_2(t) = e^{-t} \left(\frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \right)$$

$$x_1(t) = e^{-t} \cos t \qquad x_2(t) = e^{-t} \operatorname{sen} t$$







$\lambda_i = \sigma_i + j\omega_i$

σ_i → taxa de decaimento ou crescimento exponencial da resposta

ω_i → frequência de oscilação da resposta

define-se ainda:

ξ_i → fator de amortecimento

$$\zeta_i = \frac{-\sigma_i}{|\lambda_i|} = \frac{-\sigma_i}{\sqrt{\sigma_i^2 + \omega_i^2}}$$

→ resposta completa de um sistema linear!

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0, \quad u(0) = 0$$
$$y = Cx + Du$$

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau$$

é solução da equação de estados.

portanto:

$$y(t) = C e^{At} x_0 + C \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)\, d\tau + Du(t)$$

$Du(t)$ → parcela da resposta que representa a influência direta e instant. da entrada sobre a saída

$Ce^{At}x_0$ → parcela da resposta à condição inicial

$C\int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$ → parcela da resposta que representa a influência da entrada na dinâmica do estado

$$\dot{x} = Ae^{At} x_0 + Ae^{At} \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau)\, d\tau + e^{At} \cdot \left[e^{-A\tau} Bu(\tau) \Big|_0^t \right]$$

$$\dot{x} = A \left[e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(t)\, d\tau \right]$$

Aula 10: Observabilidade e controlabilidade

→ definição:

Rank (ou posto) de uma matriz M:

rank(M) = maior nº de linhas ou colunas de M que formam um conjunto de vetores L.I.

exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} ; \ rank(A) = 1$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 7 \end{bmatrix} ; \ rank(B) = 2$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 4 & 8 \end{bmatrix} ; \ rank(C) = 1$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1.10^{-50} \end{bmatrix} ; \ rank(D) = 2$$

→ Observabilidade:

definição: o sistema

$\dot{x} = Ax \ ; \ x(0) = x_0$

$y = Cx$

é observável se o conhecimento da saída $y(t)$ no intervalo $[0,t]$ é suficiente para determinar o estado x_0.

→ teste de observabilidade:

o sistema (1)-(2), com $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é observável se e só se rank$(V_O) = n$, sendo

$$V_O = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix}$$

demonstração: se $x(0) = x_0$, então $y(t) = C \cdot e^{At} \cdot x_0$.

então:

$$\left.\begin{aligned} y &= Ce^{At}x_0 \\ \dot{y} &= CAe^{At}x_0 \\ \ddot{y} &= CA^2e^{At}x_0 \\ &\vdots \\ \frac{dy^{n-1}}{dt^{(n-1)}} &= CA^{(n-1)}e^{At}x_0 \end{aligned}\right\} \begin{bmatrix} Ce^{At} \\ CAe^{At} \\ CA^2e^{At} \\ \vdots \\ CA^{n-1}e^{At} \end{bmatrix} x_0 = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \\ \ddot{y} \\ \vdots \\ \overset{n-1}{y} \end{bmatrix}$$

Pelo teorema de Cayley-Hamilton, toda matriz é raiz de seu polinômio característico.

$$\det(sI - A) = s^n + \alpha_{n-1}s^{n-1} + \ldots + \alpha_1 s^1 + \alpha_0 s^0$$

$$\det(AI - A) = A^n + \alpha_{n-1}A^{n-1} + \ldots + \alpha_1 A + \alpha_0 I = 0$$

$$A^n = -\alpha_{n-1}A^{n-1} - \ldots - \alpha_1 A - \alpha_0 I$$

Como $x_0 \in \mathbb{R}^n$, é necessário que existam n equações L.I. em (3). Para isso,

$$V_{oo}(t) = \begin{bmatrix} Ce^{At} \\ CAe^{At} \\ \vdots \\ CA^{n-1}e^{At} \\ \vdots \end{bmatrix}, \text{ em } t = 0, \ V_{oo}(0) = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$